Pablo Serrano Yáñez-Mingot,
José Alberto Hernández Gutiérrez

Una introducción amable a la Teoría de Colas: Problemas propuestos

APUNTES DE TEORÍA DE REDES — CURSO 22/23

Departamento de Ingeniería Telemática
Universidad Carlos III de Madrid

Control de versiones

2022-11-15 Última versión compilada.

2022-11-13 Primera versión completa con nuevo formato.

2022-11-05 Capítulo 1 con el nuevo formato.

Índice general

Repaso de estadística y probabilidad

Problemas recomendados

Problema 1.1. Resuelva el problema original de De Méré: "¿Qué es más probable, sacar al menos un seis en cuatro tiradas de un dado, o sacar al menos un doble seis en veinticuatro tiradas de dos dados?"

Solución: 0.5177 vs. 0.4914

Problema 1.2. Una red compuesta por 10 ordenadores y 5 servidores se conecta a Internet a través de un switch Ethernet. Todos los equipos transmiten tramas con la misma tasa, si bien los ordenadores transmiten asentimientos TCP con una probabilidad del 60 %, y tramas de datos con una probabilidad del 40 %. Para el caso de los servidores, estas probabilidades son del 90 % y 10 %, respectivamente.

Solución: 1. 7/10; 2. 3/7

1) Calcule la probabilidad de que una trama sea un asentimiento.

2) ¿Cuál es la probabilidad de que un servidor haya generado dicha trama?

Problema 1.3. Se transmiten tramas de 1000 bits con dos posibles tasas de transmisión, 10 y 40 Mbps, con tasas de error de trama de 50 % y 75 %, respectivamente. No hay número máximo de reintentos y en cada (re)transmisión se elige una tasa al azar: 1/3 de las veces, 10 Mbps, y el resto de las veces, 40 Mbps. Calcule la esperanza del tiempo hasta que una trama es entregada con éxito.

Curso 15/16 - parcial
Solución: 150 μs

Problema 1.4. Sea un móvil con dos interfaces de red, una WiFi y otra 3G. El retardo que sufre cada trama es una variable aleatoria uniformemente distribuida, independiente para cada interfaz: para WiFi el retardo varía 0 y 20 ms, mientras que para 3G el retardo varía entre 0 y 10 ms. Una aplicación de tiempo real necesita que el retardo sea menor de 5 ms (para que llegue *a tiempo*), por lo que se diseña un esquema que consiste en mandar la misma trama por los dos interfaces (es decir, la trama se duplica).

Curso 18/19 - parcial
Solución: 1. 5/8; 2. 1/8; 3. 1/4; 4. 3/4.

1) Calcule la probabilidad de que cada copia llegue antes de 5 ms, y de que alguna de las dos copias llegue antes de 5 ms.

2) Calcule la probabilidad de recibir antes de 5 ms una trama de forma duplicada.

3) Si en 5 ms sólo se ha recibido una copia, calcule la probabilidad de que haya sido enviada por la interfaz 3G.

4) Calcule la probabilidad de que una trama llegue antes por la interfaz 3G que por la interfaz WiFi (para este apartado no hace falta tener en cuenta el criterio de 5 ms).

Problema 1.5. La variable aleatoria X_1 se distribuye uniformemente en $[0, 4]$, mientras que la variable aleatoria X_2 tiene por función de densidad $f_{X_2}(x) = 2x$ para $0 \leq x \leq 1$. Calcule $\Pr(X_1 < X_2)$.

Solución: 1/6

Problemas adicionales

Problema 1.6. Suponga que el tráfico en una red se distribuye según se muestra en la tabla, donde la primera columna indica la aplicación, la segunda la distribución que siguen sus tramas, y la tercera la proporción relativa de dichas tramas.

Obtenga:

1) La longitud media de las tramas en la red.

2) La longitud media del tráfico que no sea P2P.

Solución: 1. 1085 B; 2. 837.5 B.

Aplicación	Longitud (B)	%
Skype	U(50,150)	5
P2P	U(1000,1500)	60
Web	exp(1/1000)	25
email	N(800,100)	10

Problema 1.7. Sean dos variables aleatorias independientes u_1 y u_2, uniformemente distribuidas entre 0 y 1. Calcule la esperanza del mínimo de las dos, esto es, $\mathbb{E}[\text{mín}(u_1, u_2)]$.

Solución:

Problema 1.8. Obtenga la expresión de la función de densidad del mínimo de tres variables aleatorias independientes distribuidas uniformemente entre 0 y 1.

Curso 15/16 - parcial

Solución: $f_{X_m}(t) = 3(1-t)^2$, para $t \in [0, 1]$

Problema 1.9. El 40 % de los paquetes sufren un retardo de red que se puede modelar según una variable aleatoria uniformemente distribuida entre 10 ms y 70 ms, y el 60 % restante sufren un retardo según una variable aleatoria exponencial de media 30 ms. Calcule el retardo medio de los paquetes con más de 50 ms de retardo.

Curso 14/15 - mayo

Solución: Aprox. 70 ms.

La variable aleatoria exponencial

Problemas recomendados

Problema 2.1. Suponga que, en un móvil, el tiempo de vida de cada componente se puede modelar según una variable aleatoria exponencial. La pantalla dura, en media, 4 meses; el botón del menú, 2 meses, y el módulo de WiFi, 8 meses. Reparar la pantalla cuesta 140 €, el botón 35 € y el WiFi 70 €. ¿Cuánto se gasta en media por reparación?

Curso 12/13 - junio
Solución: 70 €.

Problema 2.2. El tiempo de vida de un disco duro (HD) se puede modelar con una variable aleatoria exponencial. En una configuración RAID1 la misma información es copiada en todos los discos disponibles. Calcule la expresión de la probabilidad de que un sistema RAID1 mantenga la información más allá de un tiempo t para dos casos:

1) Dos HDs idénticos, cada uno con un tiempo medio de vida T.

2) Cuatro HDs idénticos, cada uno con un tiempo medio de vida $T/2$.

Curso 15/16 - mayo
Solución: 1. $2e^{-t/T} - e^{-2t/T}$
2. $4e^{-2t/T} - 6e^{-4t/T} + 4e^{-6t/T} + e^{-8t/T}$

Problema 2.3. Suponga un grupo de `WhatsApp` de 50 usuarios. El 40 % de los usuarios sólo manda texto, otro 40 % manda la mitad mensajes de texto y la otra mitad fotos, y el 20 % restante sólo manda fotos. El número de mensajes que manda un usuario al día se distribuye uniformemente entre 10 y 30, donde el tamaño de los mensajes se distribuye uniformemente: entre 2 y 200 bytes para los de texto, y entre 1.000 y 10.000 bytes para las fotos.

1) Calcule la cantidad de datos total (en bytes) que genera este grupo al día.

2) Calcule la probabilidad de estar 12 minutos sin recibir un mensaje de texto.

Curso 14/15 - parcial
Solución: 1. 2,260,600 bytes; 2. e^{-5}

Problema 2.4. (Ross 2.10a) Suponga que el tiempo hasta el siguiente autobús se puede modelar según una variable aleatoria exponencial, de media $1/\lambda$. Una vez en el autobús, el tiempo hasta su destino es B, constante. Por otro lado, andando desde la parada, el tiempo hasta su destino es A, también constante. Suponga que

Solución: $B + \lambda^{-1} + e^{-\lambda E}(A - B - \lambda^{-1})$.

la regla que se sigue para decidir si tomar o no el autobús es la siguiente: se espera como mucho un tiempo de espera E, pasado el cual se decide ir andando. Calcule el tiempo medio hasta el destino.

Problema 2.5. Suponga que el tiempo que se necesita para averiguar una contraseña se distribuye según una variable aleatoria exponencial de media 10 días.

Solución: $e^{-36,5}$

1) Si un usuario establece su contraseña el 1 de enero, obtenga la probabilidad de que su contraseña no sea descubierta durante el año (no bisiesto).

2) Un usuario cambia su contraseña el día 1 de cada mes. Calcule de nuevo la probabilidad anterior, y comente el resultado.

Problema 2.6. Sea un acuerdo de nivel de servicio en el que el retardo de los paquetes debe ser inferior a 0.5 s. Todo paquete con un retardo superior a dicho umbral conlleva una penalización de 0.01 €/s a partir de dicho umbral (p.ej., un paquete con un retardo total de 1.8 s conllevaría una penalización de 0.013 €). Suponga que el retardo de los paquetes sigue una variable aleatoria exponencial de media 1 segundo. Se pide: (suponga que $e^{-0,5} \approx 0,6$)

Curso 10/11 - mayo
Solución:

1) Penalización media por paquete.

2) Penalización media por paquete de los paquetes que suponen una penalización.

Problemas adicionales

Problema 2.7. El retardo en una red se distribuye según una variable aleatoria exponencial de media 10 ms. Calcule el retardo medio de los paquetes con un retardo mayor de 50 ms.

Curso 12/13 - mayo
Solución: 60 ms.

Problema 2.8. El tiempo de vida de un disco duro (HD) se puede modelar con una variable aleatoria exponencial de media $1/\lambda$. Se desea almacenar 2 TB de información y se precisa saber la probabilidad de que dicha información esté disponible tras un año de uso, existiendo tres posibles configuraciones:[1]

Curso 15/16 - parcial
Solución: 0.607 0.135 0.600

1) Un HD de 500 €, 2 TB, λ^{-1} =2 años.

2) Dos HDs de 100 €, 1 TB, cada uno con λ^{-1} =1 año, en RAID 0.

3) Dos HDs de 200 €, 2 TB, cada uno con λ^{-1} =1 año, en RAID 1.

[1] En la configuración RAID 0 (*Data Striping*) no existe redundancia y la capacidad total es la suma de las capacidades: si cualquier disco se estropea, la información se pierde. En la configuración RAID 1 (*Mirroring*) la misma información es copiada en todos los discos y la capacidad total coincide con la de un disco: sólo cuando ningún disco funciona, la información se pierde.

Procesos de Poisson

Problemas recomendados

Problema 3.1. Sea un switch al que llegan tramas según un proceso de Poisson de tasa $\lambda = 2$ tramas/s. Calcule la duración de la ventana de tiempo T en la que la probabilidad de que llegue una única trama sea máxima.

Solución: 1/2

Problema 3.2. Los goles de un equipo de fútbol siguen un proceso de Poisson. Suponga que el equipo de fútbol RM tiene una media de cuatro goles por partido, el equipo ATM una media de dos goles por partido, y se juega el partido RM-ATM. Dispone de las siguientes opciones para apostar:

Solución: 1. $2e^{-3}$; 2. $16e^{-6}$.

1) 2-1 al descanso.

2) 2-2 al terminar el partido.

Calcule la probabilidad de cada opción.

Problema 3.3. Un switch Ethernet tiene 64 puertos de entrada y dos puertos de salida. Los paquetes llegan a cada puerto de entrada con un tiempo entre paquete que se distribuye según una distribución uniforme U(2,12) segundos. El 90 % del tráfico de 63 puertos de entrada va a un puerto de salida. Discuta si el tráfico en dicho puerto se puede considerar de Poisson, y calcule su tasa.

Solución: 8,1 pps

Problema 3.4. El 50 % de las tramas de un flujo de video tienen un tamaño de 1500 B, el 45 % de 500 B, y el 5 % restante de 100 B. Se puede suponer que el tamaño de una trama es independiente de las anteriores o de las que le siguen. El tiempo entre tramas se puede modelar según una variable aleatoria uniformemente distribuida entre 10 y 30 ms. Si a un router llega el agregado de 40 flujos de video independientes, se pide

Curso 13/14 - parcial
Solución: 1. $1/e$, 2. $1 - 18{,}5e^{-5}$

1) Probabilidad de que pasen más de 10 ms sin recibir una trama de 100 B.

2) Probabilidad de recibir tres o más tramas de 1500 B en 5 ms.

Problema 3.5. Sea un switch con un puerto de entrada por el que recibe tráfico de Poisson a una tasa de 100 tramas/s y cuatro puertos de salida (O1, O2, O3 y O4).

Curso 17/18 - junio
Solución:

1) Suponga que una trama es reenviada al puerto O1, O2, O3 y O4 al azar, con probabilidades 1/2, 1/4, 1/8 y 1/8, respectivamente (Regla A de reenvío). Obtenga el tiempo medio entre tramas en el puerto O4, y discuta si se trata de un proceso de Poisson.

2) Suponga ahora que el reenvío de tramas se realiza según la siguiente regla (Regla B): la primera trama se reenvía a O4, la siguiente trama a O3, las dos siguientes tramas a O2 y las cuatro siguientes tramas a O1 (y se repite el esquema). De nuevo, obtenga el tiempo medio entre tramas en el puerto O4, y discuta si se trata de un proceso de Poisson.

3) Suponga un switch diferente, con 128 puertos de entrada, donde en cada puerto de entrada se produce un proceso de llegadas como el puerto de salida de O4 del switch anterior con la Regla A. Describa la distribución de tiempos entre llegadas a dicho switch.

4) Repita el apartado anterior con la Regla B.

Problema 3.6. El mecanismo de piggybacking consiste en unir en una misma trama información de datos y de asentimiento. Suponga un nodo donde el nivel de aplicación genera datos según un proceso de Poisson a tasa 2 tramas/ms, y que el nivel de enlace emplea el siguiente mecanismo para decidir si hacer piggybacking o no: si aparece una nueva trama de datos antes de 500 μs (contados desde que se generó el asentimiento), se envían unidos datos y asentimiento, lo que supone un retardo de transmisión de 1 ms. Si **no** aparece una trama de datos antes de 500 μs, se envía el asentimiento por separado, lo que supone un retardo de transmisión de 200 μs.

Curso 18/19 - parcial
Solución: 1. 0.386; 2. 0.21 ms; 3. 0.887 ms.

Sea D la variable aleatoria definida como "retardo medio de un asentimiento," de la que se quiere calcular su esperanza $E[D]$. Suponga que se acaba de generar un asentimiento.

1) Calcule la probabilidad de que un asentimiento se mande por separado (esto es, no se realiza piggybacking).

2) Sea t la variable aleatoria definida como "tiempo hasta que el nivel de aplicación genera la siguiente trama de datos." Calcule el valor medio de t cuando sí se produce piggybacking.

3) Calcule $E[D]$.

Problemas adicionales

Problema 3.7. El tiempo entre dos peticiones de un usuario a YouTube se puede modelar con una variable aleatoria distribuida uniformemente entre 0 y 40 minutos. El 60 % de las peticiones se realizan a servidores en EEUU. Sea un una celda de telefonía móvil sirviendo a 100 usuarios:

Curso 15/16 - parcial
Solución: 1. 3 pet./min.; 2. 0.2

1) Caracterice el proceso de generación de peticiones de video a EEUU, indicando las suposiciones realizadas.

2) Calcule la probabilidad de que en un minuto se produzcan menos de dos peticiones a EEUU.

Problema 3.8. Una aplicación genera tramas según un proceso de Poisson a tasa λ tramas/s. Para que el interfaz inalámbrico no entre en modo de ahorro de energía, un módulo de control genera una trama si no se detecta tráfico durante un tiempo $T = 1/\lambda$ s. Calcule la tasa de transmisión de tramas, y discuta si se trata de un proceso de Poisson.

Solución: 1. $\lambda/(1 - 1/e)$; 2. No

Problema 3.9. Sea un router de un datacenter con 1 interfaz de salida a 10 Gbps y 20 interfaces para conectar equipos. 10 interfaces están conectadas a servidores Web, 5 interfaces están conectadas a discos en red para Backup y las últimas 5 están libres. Los servidores Web reciben paquetes según un proceso de Poisson de tasa 10 paquetes/ms mientras que los discos de Backup reciben en media 15 paquetes/ms, también según un proceso de Poisson. La longitud de los paquetes se puede modelar según una v.a. exponencial, de media 1000 bytes para el tráfico Web y 9000 bytes para el tráfico Backup. Calcule:

Curso 18/19 - junio
Solución:

1) La probabilidad de que al escoger dos paquetes al azar en el router sean los dos de tipo Backup.

2) La probabilidad de que en un intervalo de 1 μs no llegue ningún paquete a ningún servidor.

3) La carga de la interfaz de salida del router por la que pasa todo el tráfico agregado de Backup y Web. Suponga un *buffer* de capacidad infinita.

4) Se quieren añadir servidores de Backup en algunas de las 5 interfaces restantes, sin superar una carga de 0.9 en la interfaz de salida, ¿cuántos se podrían añadir?

Problema 3.10. Sea un switch con un estado activo (cursando tráfico) y pasivo (ahorro de energía). Si no hay tráfico durante T ms, pasa al estado pasivo, del que despierta en cuanto llega una trama. El tráfico llega según un proceso de Poisson de tasa λ tramas/ms.

Solución: 1. $1/\lambda$; 2. $\frac{1}{\lambda}\left(e^{\lambda T} - 1\right)$
Nivel: $*$

1) Calcule la duración media de un intervalo pasivo.

2) Calcule la duración media de un intervalo activo.

Teoría de colas: fundamentos

Problemas recomendados

Problema 4.1. Suponga que el tiempo que tarda un cajero en atender a un cliente es exponencial. En un banco hay dos cajeros, que tardan en media 3 y 6 minutos en atender a un cliente, respectivamente. Suponga que un cliente llega al banco y los dos cajeros están ocupados, y no hay nadie más esperando. Se pide:

Curso 10/11 - junio
Solución: 1. e^{-1}; 2. 6 minutos.

1) Probabilidad de estar más de 2 minutos esperando.

2) Tiempo medio de estancia total en el banco para ese cliente.

Problema 4.2. Un códec de voz sobre IP (VoIP) genera paquetes de 80 bytes de longitud fija cada 20 +/- 1 ms (esto es, el tiempo hasta el siguiente paquete se distribuye uniformemente entre 19 y 21 ms). Suponga que el agregado de 100 teléfonos VoIP se transmite a 10 Mbps. Calcule la probabilidad de que el segundo paquete que se envíe tenga que esperar en cola.

Curso 09/10 - mayo
Solución: $1 - e^{-0{,}32}$

Problema 4.3. A un servidor con una única CPU y una cola de espera infinita llegan peticiones según un proceso de Poisson de tasa λ peticiones/segundo. Una vez que la CPU comienza a atender una petición, el tiempo que tarda en completarla se puede modelar con una variable aleatoria exponencial de media μ^{-1} segundos. Se pretende analizar el servicio recibido por la segunda petición que llega al sistema. En concreto, se desea conocer para la segunda petición:

Curso 11/12 - parcial
Solución: 1. $\lambda/(\lambda+\mu)$;
2. $(\lambda/\mu)/(\lambda+\mu)$;
3. $\mu^{-1}(1+\lambda/(\lambda+\mu))$.

1) Probabilidad de que tenga que esperar.

2) Tiempo medio de espera hasta que empieza a ser atendida.

3) Tiempo medio total que pasa la petición en el servidor.

Problema 4.4. En la demostración del Teorema de Little, el número de usuarios en el sistema $N(t)$ viene determinado por la diferencia entre el proceso de llegadas $\alpha(t)$ y el de salidas $\beta(t)$:

Solución:

$$N(t) = \alpha(t) - \beta(t).$$

Suponiendo que la tasa media de llegadas es $\lambda = 7$ usuarios/s y la tasa media de salidas es $\mu = 5$ usuarios/s, ¿cuál es la esperanza del número de usuarios a los 10 segundos? ¿Y tras pasar *mucho* tiempo?

Problema 4.5. Suponga un autobús de 50 plazas con una ocupación media del 80 % y donde el la duración media del viaje es de 20 minutos. ¿Cuántos usuarios por hora usan el autobús?

Solución:

Problemas adicionales

Problema 4.6. (Harchol-Balter) Suponga un servidor con un tiempo medio de servicio $1/\mu$ al que llegan peticiones a una tasa λ, lo que proporciona un tiempo medio de estancia en el sistema T. Si se duplican tanto la tasa de entrada como la capacidad del servidor, ¿cómo sería el nuevo tiempo medio de estancia en relación al anterior?

Solución:

Problema 4.7. Sea un sistema $D/D/1$ con tasas de entrada λ y de procesamiento μ. Si $\lambda < \mu$, calcule W.

Solución:

Cadenas de Markov de tiempo discreto

Problemas recomendados

Problema 5.1. Tres de cada cuatro camiones en una carretera son seguidos por un coche, mientras que uno de cada cinco coches es seguido por un camión. Calcule la fracción de vehículos que son camiones.

Solución: 4/19

Problema 5.2. (Ross, Introd. Cap. 4) Suponga que la probabilidad de que un día llueva (o no) depende de si ha llovido (o no) en los tres días anteriores. Muestre la forma en que podría modelar el sistema usando una cadena de Markov. Deduzca el número de estados necesarios.

Solución: 8

Problema 5.3. Siguiendo con el problema 5.2, suponga ahora que si ha llovido en los tres días anteriores, la probabilidad de que llueva hoy es de 0.8; si no llovió en ninguno de los tres días anteriores, la probabilidad de que llueva hoy es de 0.2; y en cualquiera de los otros casos, hay una probabilidad de 0.6 que el tiempo hoy sea como el de ayer. Determine P para la cadena de Markov propuesta.

Solución:

Problema 5.4. Una moneda 1 cuando es lanzada al aire tiene una probabilidad de 0.6 de que salga cara, mientras que una moneda 2 lo hace con probabilidad 0.5. Una moneda es lanzada al aire continuamente hasta que sale cruz, en ese momento la moneda se retira y se coge la otra.

Solución: 1. 0.44; 2. 4/9; 3. 2/5.

1) Si se empieza moneda 1, calcule la probabilidad de que la moneda 2 sea usada en el tercer lanzamiento.

2) Calcule la proporción de lanzamientos que se realizan con la moneda 2.

3) Indique la proporción de caras que son debidas a la moneda 2.

Problema 5.5. Una tarjeta de red tiene tres velocidades de transmisión, 1, 4 y 8 Mbps, que dan lugar a una probabilidad de pérdida de trama de $p_1 = 1/2$, $p_4 = 1/2$ y $p_8 = 1/4$, respectivamente. El esquema que se usa para adaptar la velocidad de transmisión es el siguiente: ante una pérdida, se transmite a 1 Mbps, mientras que tras dos éxitos consecutivos a una velocidad se aumenta la velocidad al siguiente valor superior disponible. Calcule la velocidad media (en Mbps) de transmisión.

Curso 13/14 - junio
Solución: 40/17 Mbps

Problema 5.6. Sea un modelo de Internet simplificado, con tres páginas web: A, B, y C. Cada página tiene un número de enlaces al resto de páginas, según lo indicado en la Tabla 1. Se define "posicionamiento" de una página como la proporción de visitas que un robot que navegase al azar pasase en dicha página.

Curso 15/16 - parcial
Solución: 2. A: 8/19, B: 4/19, C: 7/19

	Enlaces a página		
Página	A	B	C
A		100	100
B	25		75
C	1000		

Tabla 5.1: Enlaces de cada página en el Problema 5.6.

1) Modele el problema con una cadena de Markov. ¿Es periódica?

2) Calcule el posicionamiento de cada página.

Problema 5.7. Cuatro nodos A, B, C y D, comparten el medio según el siguiente esquema de paso de testigo: tras la transmisión de una trama, la estación A mantiene el testigo (y vuelve a transmitir) con probabilidad 2/3, y con probabilidad 1/3 lo pasa a la estación B; la estación B transmite una trama, y el 50 % de las veces pasa el testigo de vuelta a A, y el 50 % lo pasa a la estación C; la estación C siempre transmite cinco tramas seguidas y pasa el testigo a la estación D, que transmite una trama y pasa el testigo a la estación A. Todas las tramas tienen una longitud constante de 1500 B y la velocidad de transmisión es de 100 Mbps.

Curso 18/19 - parcial
Solución: 1. No; 2. Sí; 3. 28/54; 4. 14; 5. 6/14, 2/14, 5/14, 1/14.

1) Considere el proceso de transmisión de tramas del nodo A: ¿es un proceso de Poisson? ¿Por qué?

2) Modele el sistema con una cadena de Markov. ¿Es irreducible? ¿Por qué?

3) Suponga que la primera transmisión la realiza el nodo A. Calcule la probabilidad de que la cuarta transmisión la realice el nodo A.

4) Calcule el numero medio de tramas entre dos transmisiones de D.

5) Calcule la proporción relativa de tráfico que genera cada nodo.

Problema 5.8. Tras un día soleado, el 50 % de las veces vuelve a hacer sol, salvo que sea el tercer día consecutivo con sol, que entonces es seguro que al día siguiente será nublado. Tras un día nublado, el 25 % de las veces vuelve a ser nublado al día siguiente, y el 75 % de las veces es soleado. Un sensor recibe 3700 lux un día soleado y 74 lux un día nublado. Calcule la luminosidad que recibe en media.

Curso 13/14 - mayo
Solución: 2132 lux

Problema 5.9. Sea una cadena de Markov discreta con dos estados, A y B, y el siguiente ejemplo de realización de la cadena:

Curso 17/18 - parcial
Solución: 1. ; 2. (41/72, 31/72); 3. (4/7, 3/7); 4. 2 slots, 1.5 slots.

$$ABAAAAABBBAABABAB$$

Se pide:

1) Estime el diagrama de transición de estados para esta cadena, indicando el valor estimado de la matriz P.

2) Suponiendo que ambos estados son igualmente probables al inicio ($\pi^{(0)}$), obtenga $\pi^{(2)}$ para ese valor de P.

3) Obtenga el valor de $\pi^{(30)}$.

4) Obtenga los tiempos medios de estancia en cada estado A y B (*sojourn times*).

Problemas adicionales

Problema 5.10. *El problema del gato y el ratón.* Hay cinco cajas en fila, con un gato en la primera y un ratón en la última. Tras un intervalo de tiempo T, cada animal salta a una caja colindante, completamente al azar. Modele el sistema con una cadena de Markov discreta.

Solución: Hay varias soluciones.
Nivel: ∗

Problema 5.11. Un determinado servidor es poco fiable: tiene días buenos, regulares y malos. La probabilidad de que una petición falle depende de cada día, y se tiene que las probabilidades de fallo son $p_B = 0$, $p_R = 1/2$, y $p_M = 5/8$, para cada el caso de un día bueno, regular y malo, respectivamente. Tras un día bueno, existe una probabilidad del 50 % de tener un día regular, y del 50 % de tener un día malo. Después de un día regular siempre hay un día malo, mientras que después de un día malo el 25 % de las veces viene un día bueno, y el 75 % otro día malo.

Curso 11/12 - mayo
Solución: 1. 1/2; 2. 1/8.

1) Calcule la probabilidad media de fallo de una petición.

2) Si hoy es un día malo, ¿qué probabilidad hay de que ayer fuese un día bueno?

Problema 5.12. El juego de piedra, papel o tijera se realiza entre dos jugadores. Cada uno elige uno de los elementos de forma independiente, y se tiene que la piedra vence a la tijera, la tijera vence al papel, y el papel vence a la piedra (si los elementos coinciden, hay empate). Suponga que un amigo siempre decide piedra, mientras que el otro amigo actúa de una forma más elaborada: en caso de empate nunca repite elemento, cuando gana repite elemento el 50 % de las veces, y todas las demás alternativas se distribuyen de forma equiprobable. Calcule la proporción de partidas en las que la jugada es (piedra, papel).

Curso 12/13 - junio
Solución: 4/9

Problema 5.13. Suponga que el tiempo mañana, definido como lluvioso o no lluvioso, depende de los dos días previos, según las siguientes reglas: mañana lloverá con probabilidad 0.7 si llovió los dos días anteriores; lloverá con probabilidad 0.5 si hoy llovió pero ayer no; lloverá con probabilidad 0.4 si llovió ayer pero hoy no; lloverá con probabilidad 0.2 si no llovió en los dos días anteriores.

Curso 17/18 - parcial
Solución: 1. ; 2. ; 3. 40 %

Problema 5.14. Sea una red compuesta por tres nodos (A, B y C) que comparten el medio según un esquema de paso de testigo que resulta en el siguiente patrón de transmisiones: tras la transmisión de una trama, la estación A mantiene el testigo (y vuelve a transmitir) con probabilidad p, y con probabilidad $1 - p$ lo pasa a la estación B; la estación B siempre transmite dos tramas seguidas antes de pasar el testigo a la estación C; la estación C transmite una trama el 50 % de las veces, y tres tramas seguidas el otro 50 % de las veces, antes de pasar el testigo a la estación A. Calcule el valor de p que proporciona el 50 % del ancho de banda disponible a la estación A.

Curso 14/15 - parcial
Solución: 3/4

Cadenas de Markov de tiempo continuo

Problemas recomendados

Problema 6.1. Sea un recinto con dos cabinas de teléfono. Cuando nadie está hablando, acuden a llamar según un proceso de Poisson de media 6 usuarios/hora, pero si alguien se encuentra ocupando una cabina, el ritmo de llegadas se duplica. Además, nunca hay alguien esperando para hablar: los usuarios prefieren buscar otra cabina. Sabiendo que la duración de una llamada se puede modelar mediante una distribución exponencial de media un minuto, compruebe que se cumple el teorema de Little, calculando el número medio de usuarios en el sistema, la tasa media de llegadas y el tiempo medio de estancia en el sistema.

Solución: $12/111 = 720/111 \cdot 1/60$.

Problema 6.2. Sea una pequeña gasolinera con dos surtidores en serie, en la que los coches usan el surtidor más cercano a la salida siempre que esté disponible, ya que un coche en el primer surtidor bloquea el acceso al segundo surtidor. Además, un coche en el segundo surtidor bloquea la salida desde el primero. No hay sitio para más de dos coches y tampoco espacio para esperar a que alguno quede libre, y un coche que entra nunca abandona la gasolinera hasta que ha sido servido. Suponga que llegan coches a la gasolinera según un proceso de Poisson de media 1 coche por minuto y que el tiempo en repostar se puede modelar con una variable aleatoria exponencial de media 15 segundos. Calcule:

Curso 12/13 - parcial
Solución: 1. 1/17; 2. 13/51

1) La probabilidad de que un vehículo no pueda entrar.

2) El número medio de vehículos en la gasolinera.

3) El tiempo medio que pasa un vehículo en la gasolinera. El tiempo medio que pasan en la gasolinera los vehículos que usan el surtidor 1.

Problema 6.3. Una organización tiene dos routers de salida a Internet, a 100 Mbps cada uno, contratados con dos diferentes proveedores. El tiempo que funciona un router se puede modelar con una v.a. exponencial de media 6 meses. El tiempo que pasa desde que un router se estropea hasta que vuelve a estar disponible se puede modelar con otra v.a. exponencial de media 2 meses. Calcule los días año que la organización no tiene Internet y la velocidad media de acceso cuando sí tiene internet.

Solución: 3/4 mes, 150 Mbps

Problema 6.4. Sea un conmutador con dos puertos de entrada diferenciados y un único puerto de salida. El tráfico del puerto de baja prioridad llega según un proceso de Poisson de tasa $\lambda_B = 2$ tramas/segundo; si el puerto de salida está ocupado, es descartado. El tráfico del puerto de alta prioridad llega según un proceso de Poisson de tasa $\lambda_A = 4$ tramas/segundo, y en caso de que el puerto de salida esté ocupado se dispone de espacio para almacenar una trama. El tiempo de servicio de cada trama se puede modelar según una variable aleatoria exponencial de media 0.125 segundos. Se pide:

Curso 14/15 - parcial
Solución: 1. 3/17, 9/17; 3. 10/17, 2/17.

1) Calcule la probabilidad de pérdida para cada tipo de tráfico.

2) Calcule el retardo total de cada tipo de tráfico.

3) Calcule el número medio de tramas de cada tipo de tráfico en el sistema.

Problema 6.5. A una tarjeta de red llegan tramas de datos y de voz; el tiempo entre tramas para cada tipo de tráfico se distribuye según una variable aleatoria exponencial, de media 200 ms para la voz y 100 ms para los datos. Por limitaciones de memoria, la tarjeta sólo tiene capacidad para una trama de datos o hasta tres tramas de voz: si una trama llega y no cabe, se descarta. El tiempo para transmitir una trama se puede modelar con una variable aleatoria exponencial, de media 400 ms para las de voz y 500 ms para las de datos. Calcule la probabilidad de que una trama de datos sea descartada porque haya otra trama de datos siendo procesada y el retardo medio total (en segundos) para el tráfico de voz.

Curso 13/14 - junio
Solución:

Problema 6.6. Sea un sistema con dos servidores sin espacio en cola. Un servidor tiene una capacidad de 2 paquetes/s y el otro 4 paquetes/s. Los paquetes llegan según un proceso de Poisson a tasa 1 paquete/s y son atendidos por el servidor rápido si está disponible (vacío), si no, por el servidor lento, y si los dos servidores están ocupados, son descartados. En estas condiciones:

Curso 15/16 - mayo
Solución: 3.5 %; el rápido atiende 4.8 veces más tráfico

1) Calcule la proporción de paquetes descartados. ¿Qué proporción de paquetes son atendidos por el servidor rápido y qué proporción por el lento?

2) Calcule el tiempo medio en atravesar el sistema. ¿Qué retardo sufren los paquetes que atraviesan el primer servidor y qué retardo sufren los que atraviesan el segundo servidor?

Problema 6.7. Un cliente en una red WiFi recibe las tramas en modo "rx" si van destinadas a su dirección MAC, y en modo "idle" si van destinadas a otra dirección. En el primer caso, una vez recibida la trama pasa a modo "idle", mientras que en el segundo caso tras acabar la trama pasa al modo "sleep". El tiempo entre que acaba una trama y llega la siguiente se puede modelar como una variable aleatoria exponencial de media 10 ms, y la duración

Curso 11/12 - junio
Solución: 10/3 W.

de las tramas es otra variable aleatoria exponencial de media 5 ms. Las tramas destinadas al móvil constituyen el 80 % del tráfico del total. El terminal en modo "sleep" consume 0.5 W; en modo "idle" consume 1 W y en modo "rx" consume 10 W. Calcule el consumo medio del terminal.

Problemas adicionales

Problema 6.8. Sea un edificio con dos ascensores, cada uno con un tiempo de vida que se puede modelar con una variable aleatoria exponencial de media $1/\lambda$. Hay dos políticas de reparación:

Solución: 1/4 vs. 1/5 del tiempo

- Se avisa a mantenimiento cuando los dos ascensores están estropeados, siendo el tiempo de reparación de los dos ascensores (a la vez) una variable aleatoria exponencial de media $1/\mu$.
- Se avisa a mantenimiento en cuanto un ascensor se estropea, siendo el tiempo de reparación por ascensor una variable aleatoria exponencial de media $2/\mu$, y sólo se repara un ascensor a cada vez.

Calcule la proporción de tiempo que los dos ascensores están funcionando, si $1/\lambda = 2$ semanas y $1/\mu = 1$ semana.

Problema 6.9. Sea una red 802.11 donde la tasa de transmisión es de 4 Mbps. Una estación 802.11 debe primero autenticarse y luego asociarse (en este orden) antes de poder enviar datos. Suponga que autenticarse requiere un tiempo exponencial de media 1 ms y asociarse supone otro tiempo exponencial de media 1 ms, pero este último proceso falla un 25 % de las veces, lo que conlleva además la pérdida de la autenticación. Una vez completada la asociación, la estación transmite durante un tiempo exponencial de media 8 ms, pasado el cual vuelve al estado inicial (esto es, sin autenticar ni asociar). Calcule la tasa máxima efectiva de transmisión.

Curso 11/12 - parcial
Solución: 3 Mbps

Problema 6.10. Una línea de montaje se compone de dos estaciones en serie. Cada estación admite un único item en cada momento. Cuando un item termina en la primera estación, pasa a la segunda si ésta está vacía, de lo contrario se queda esperando. Los items llegan a la primera estación según un proceso de Poisson de tasa λ, pero sólo se admiten si la estación está vacía –de lo contrario, son descartados. El tiempo que tarda un item en la estación i es exponencial de media $1/\mu_i$. Defina la cadena de Markov que modela este proceso. Calcule, para $\lambda = 10$, $\mu_1 = 20$ y $\mu_2 = 50$:

Solución: 1. 175/317; 2/317.

1) La probabilidad que no haya ningún item en la línea de montaje.
2) La probabilidad que de haya un item esperando en la primera estación.

Problema 6.11. Sea un sistema sin espacio en cola con dos servidores, uno rápido y otro lento, al que llegan peticiones según un

Curso 17/18 - parcial
Solución: 1. 1/9; 2. 0,3 ms

proceso de Poisson a tasa 2 peticiones/ms. Sólo se accede al servidor lento si el rápido está ocupado; si los dos servidores están ocupados y llega una trama, es descartada. El tiempo de servicio es una v.a. exponencial, de media 250 μs para el servidor rápido y 500 μs para el servidor lento. Calcule la probabilidad de descartar una trama y el tiempo medio de estancia en el sistema **en μs**.

Problema 6.12. Sea un conmutador con tres puertos de entrada y un único puerto de salida. El tráfico de cada puerto de entrada llega según un proceso de Poisson, a tasas $\lambda_1 = 2$ tramas/s, $\lambda_2 = 8$ tramas/s y $\lambda_3 = 10$ tramas/s al primer, segundo y tercer puerto, respectivamente. Para el caso de los dos primeros puertos de entrada, si una trama llega y el puerto de salida está transmitiendo, la trama es descartada. Para el caso del tercer puerto, hay espacio para almacenar una trama por si el puerto de salida estuviese transmitiendo. El tiempo de transmisión de una trama se puede modelar con una v.a. exponencial de media 100 ms. Calcule, **para el tráfico del tercer puerto de entrada**:

Curso 17/18 - parcial
Solución:

1) Porcentaje de tramas descartadas.

2) El tiempo medio de espera en cola **en ms**.

Problema 6.13. Cuatro usuarios comparten una misma cuenta de un servicio de vídeo bajo demanda, si bien dicho servicio sólo permite un máximo de tres sesiones simultáneas: si ya se encuentran tres usuarios conectados y un cuarto usuario intenta acceder, no se le permite la conexión. Suponga que, **para un usuario**, el tiempo medio conectado a dicho servicio se distribuye según una variable aleatoria exponencial de media $\mu^{-1} = 2$ horas y que, una vez desconectado, el tiempo que pasa hasta que vuelve a querer conectarse se distribuye según otra variable aleatoria exponencial de media $\lambda^{-1} = 8$ horas. Si no puede conectarse, el tiempo que pasa hasta que vuelve a intentarlo sigue la misma variable aleatoria exponencial de media $\lambda^{-1} = 8$ horas, independientemente del reintento que sea. Se pide:

Curso 18/19 - parcial
Solución:

1) Modele el sistema con una cadena de Markov.

2) Calcule la probabilidad de que un usuario quiera ver `Netflix` y que no pueda.

3) Número medio de usuarios conectados.

Problema 6.14. Se puede contratar uno o más accesos a Internet con dos operadores diferentes, Azul y Rojo. Cada acceso que se contrate emplea un módem que en ocasiones se estropea y precisa ser reparado, para lo que debe acudir un técnico. El operador Azul siempre tiene un técnico disponible para reparar cualquier acceso ($N_T = \infty$), y envía tantos técnicos como módems estropeados, mientras que el operador Rojo sólo envía un técnico por cliente ($N_T = 1$), independientemente del número de módems estropeados. Se puede suponer que tanto el tiempo de vida del módem (t_M)

Curso 18/19 - junio
Solución:

como el tiempo de reparación de un módem (t_R) siguen una variable aleatoria exponencial. Se resumen las características de cada operador en la tabla a continuación:

Operador	Velocidad	t_M	t_R	N_T	Precio
Azul	200 Mbps	100 días	25 días	∞	100 €
Rojo	300 Mbps	20 días	10 días	1	100 €

Para cada uno de los siguientes escenarios, se pide (a) modele el sistema con una Cadena de Markov y (b) calcule el rendimiento en términos de velocidad media (en Mbps) y disponibilidad (número de días al año con acceso a internet):

1) Dos accesos con el operador Azul.

2) Dos accesos con el operador Rojo.

3) Dos accesos, pero uno con cada operador.

Teoría de colas: sistemas básicos

Problemas recomendados

Problema 7.1. Compare el tiempo medio total de estancia en un sistema de un M/M/1 con el de un M/M/3 pero en el que cada recurso tiene un tercio de la capacidad. Realice la comparación para $\lambda = 10$ llegadas/ms, $\mu_1 = 30$ salidas/ms y $\mu_3 = 10$ salidas/ms.

Curso 14/15 - parcial
Solución: El M/M/3 es 23/11 veces más lento

Problema 7.2. El tiempo que se tarda en atender a un cliente en una hamburguesería se puede modelar con una variable aleatoria exponencial de media 3 minutos. Los clientes llegan según un proceso de Poisson de tasa 30 clientes/hora y forman una única fila hasta ser atendidos. El encargado tiene que decidir si poner dos, tres o cuatro empleados atendiendo en paralelo, queriendo minimizar el coste bajo la condición de que el tiempo medio total que tarda un cliente desde que llega hasta que ha sido atendido sea menor de 5 minutos. Calcule la mejor solución.

Curso 12/13 - junio
Solución: Tres empleados

Problema 7.3. Sea un pequeño aparcamiento público con cuatro plazas, al que los usuarios intentan acceder a una tasa de 24 coches por día, según un proceso de Poisson. El tiempo que permanece un coche se puede modelar con una variable aleatoria exponencial, de media dos horas, y los coches no esperan para entrar al aparcamiento: si se encuentra ocupado, se van. Si un coche paga en media 3 €, calcule los ingresos medios **por hora** del aparcamiento.

Curso 13/14 - mayo
Solución: 19/7 €/h.

Problema 7.4. Sean dos centrales unidas por 4 circuitos. La primera recibe llamadas hacia la segunda a una tasa $\lambda = 3$ llamadas/minuto. La segunda recibe llamadas hacia la primera a una tasa tres veces inferior (también de Poisson). La duración de las llamadas es exponencial, de media 30 segundos. Si se intenta una llamada pero están todos los circuitos ocupados, se pierde. Se pide

Solución: 1. 76/21; 2. 38/21.

1) Llamadas atendidas por unidad de tiempo.

2) Número medio de circuitos ocupados.

Problema 7.5. Una central de comunicaciones da servicio a tres pueblos (A, B y C) de 1.200, 2.000 y 4.000 habitantes, respectivamente. Se estima que cada habitante realiza, en media, una llamada cada 30 días, y que la duración de estas llamadas se puede modelar con una v.a. exponencial de media 12 minutos. Si la central puede cursar como máximo 5 llamadas a la vez, calcule la probabilidad de

Curso 17/18 - parcial
Solución: 4/109

que una llamada sea rechazada desde cada pueblo, indicando las suposiciones que ha de realizar (use al menos tres decimales, o una fracción).

Problema 7.6. Un servidor emplea tres máquinas idénticas para servir peticiones web, con una única cola de espera. Dicha cola tiene tamaño infinito, y las peticiones se dirigen a la primera máquina que quede disponible. Las peticiones llegan según un proceso de Poisson de tasa 4 peticiones/segundo, y el tiempo que tarda en ser servida una petición se distribuye según una variable aleatoria exponencial de media 500 ms.

Curso 11/12 - parcial
Solución: 1. 13/18; 2. 1/2.

1) Calcule, en segundos, el tiempo medio total que se tarda en atender una petición.

Suponga ahora que en vez de tres máquinas se emplea una única máquina, pero tres veces más rápida.

1) ¿Cuál sería en estas condiciones el valor del tiempo medio total?

2) Compare los resultados anteriores.

Problemas adicionales

Problema 7.7. Suponga una barra de comida rápida en la que los clientes se sientan en uno de los dos taburetes disponibles a comer. Los clientes llegan según un proceso de Poisson de tasa 10 clientes/hora, si no hay taburete disponible se marchan, y el tiempo que pasan en la barra se puede modelar con una variable aleatoria exponencial de media 12 minutos. En estas condiciones, cada cliente paga en media 30 €. El dueño del local se plantea ampliar la barra con otro taburete, pero cree que los clientes pagarían 5 € menos cada uno. Calcule: a) la probabilidad de que la barra esté vacía en las dos situaciones y b) si ganaría más dinero ampliando la barra.

Curso 13/14 - junio
Solución: a) 1/5 vs. 3/19; b) sí

Problema 7.8. Una pequeña central de comunicaciones da servicio a un municipio de 30.000 habitantes. Se estima que cada habitante realiza, en media, una llamada cada 30 días, y que la duración de estas llamadas se puede modelar con una v.a. exponencial de media 4 minutos y 30 segundos. Si la central dispone de 6 circuitos, por lo que puede cursar como máximo 6 llamadas a la vez, calcule:

Curso 17/18 - mayo
Solución:

1) Probabilidad de que una llamada sea rechazada.

2) Número medio de circuitos ocupados.

Problema 7.9. Se quiere diseñar un sistema para servir un tráfico de peticiones que sigue un proceso de Poisson a tasa $\lambda = 7$ peticiones/ms, sabiendo que el tiempo para servir cada petición sigue una variable aleatoria exponencial. Se plantean dos opciones: (a) emplear un único servidor que proporciona un tiempo medio de

Curso 18/19 - parcial
Solución:

servicio de $t_1 = 50$ microsegundos y que dispone de un espacio ilimitado de espera en cola, o (b) emplear cuatro servidores idénticos, que no disponen de espacio de espera en cola y que proporcionan un tiempo medio de servicio de $t_4 = 200$ microsegundos. Se pide:

1) Calcule el tiempo medio de estancia en el sistema, tiempo medio de espera en cola y probabilidad de pérdida de tráfico para la opción (a).

2) Calcule el tiempo medio de estancia en el sistema, tiempo medio de espera en cola y probabilidad de pérdida de tráfico para la opción (b)

3) Repita los anteriores cálculos para $\lambda = 15$ peticiones/ms.

Calcule todos los tiempos en ms.

Teoría de colas: sistemas avanzados

Problemas recomendados

Problema 8.1. Sea una línea de transmisión a 80 Mbps. A dicha línea llega un flujo de 15 tramas/ms, con dos tipos de trama, unas de longitud fija e igual a 40 bytes, y otras de una longitud que se puede modelar según una variable aleatoria exponencial de media 960 bytes. Hay el mismo número de tramas de un flujo que de otro y se puede suponer que el agregado se ha realizado al azar. Calcule el retardo medio total que sufre cada tipo de tráfico.

Solución: 281.32 μs, 373.32 μs

Problema 8.2. A un nodo llegan tramas TCP según un proceso de Poisson de tasa 15 tramas por milisegundo. Una proporción p de dichas tramas la constituye segmentos de datos TCP, de longitud constante e igual a 960 bytes, mientras que el resto son asentimientos, de tamaño fijo 40 bytes. El enlace de salida es de 80 Mbps.

Curso 10/11 - junio
Solución: 1. 98 %; 2. 1/2; 3. 138.48 μs.

1) Si $p = 2/3$, calcule la ocupación media del enlace.

2) Si la ocupación media es del 75 % (o sea, 3/4), calcule p.

3) Suponga ahora que hay tantos segmentos como asentimientos (o sea, $p = 1/2$). Calcule el tiempo medio de espera en cola.

Problema 8.3. A un enlace de 400 Mbps llegan tramas según un proceso de Poisson a tasa 2 tramas/segundo. La longitud de las tramas se distribuye uniformemente entre 0 y 30 bytes.

Curso 14/15 - parcial
Solución: 1. 600 ms; 2. 557.1 ms

1) Calcule el retardo medio en ms para atravesar el enlace.

Suponga que se instala un discriminador de tráfico, que clasifica las tramas según su longitud: las tramas menores de 10 bytes van a una cola de alta prioridad, y las mayores a una cola de baja prioridad.

2) Calcule el retardo medio en ms que sufre las tramas mayores y menores de 10 bytes, y el retardo medio general.

Problema 8.4. Un hogar tiene contratada una tarifa de Internet a 100 Mb/s, que proporciona un router en el que nunca se producen descartes porque tiene una memoria de gran tamaño para almacenar tramas. En este hogar sólo existen dos dispositivos que generen tráfico: una PS3 y un PC. Considere que las tramas que generan la PS3 y el PC siguen una distribución exponencial, de media

Curso 17/18 - junio
Solución:

200 Bytes para la PS3 y 500 Bytes para el PC. Además, PS3 y PC generan tramas según un proceso de Poisson de tasa 5 000 tramas/s y 3 000 tramas/s, respectivamente. Calcule:

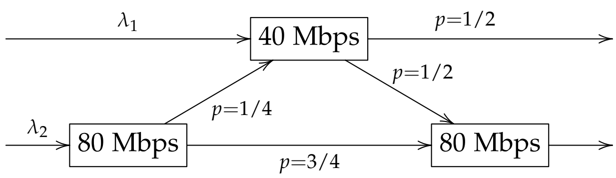
1) La carga del enlace de 100 Mb/s hacia Internet (es decir, el % de tiempo que está ocupado el enlace).

2) El retardo de cola y retardo total que sufre cada tipo de trama.

3) Suponiendo que el router prioriza el tráfico de la PS3 sobre el del PC, obtenga el retardo en cola y total de cada tipo de tráfico.

Problema 8.5. Sea la siguiente red de comunicaciones, donde las cajas representas switches, cada uno con la velocidad de procesado de tramas indicada (suponga que un switch sólo tiene una CPU) y la p asociada a cada enlace indica la probabilidad de que una trama sea re-dirigida en una determinada dirección. Desprecie los tiempos de transmisión entre switches.

Curso 14/15 - parcial
Solución: 11/10 ms, 71/120 ms



Si $\lambda_1 = 3$ tramas/ms, $\lambda_2 = 4$ tramas/ms, y la longitud de todas las tramas se puede modelar con una variable aleatoria exponencial de media 1000 bytes, calcule el retardo medio (en ms) para cada uno de los dos flujos, λ_1 y λ_2.

Problema 8.6. Sea la red de colas de la Figura 8.1, donde $\lambda = 12$ usuarios/s. Los tiempos de servicio de cada cola son $1/\mu_1 = 0.1$ s, $1/\mu_2 = 0.05$ s y $1/\mu_3 = 0.2$ s, y las probabilidades son $p_1 = 1/3$ y $p_2 = 1/4$.

Curso 13/14 - mayo
Solución: 1. 1 s; 2. 5/17

1) Calcule el tiempo total que pasa en media una trama en el sistema (indique las suposiciones que tiene que hacer para resolver el problema).

2) Calcule el valor de p_2 a partir del cual el sistema se congestionaría.

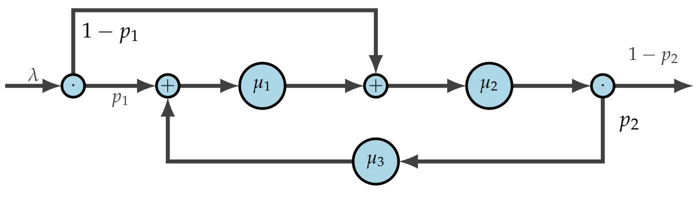


Figura 8.1: Red de colas del Problema 8.6

Problemas adicionales

Problema 8.7. Sea una línea de transmisión a 100 Mbps con ca-

Curso 18/19 - junio
Solución:

pacidad ilimitada para almacenar tramas en espera. A dicha línea llegan dos flujos: uno de asentimientos de longitud fija e igual a 100 bytes según un proceso de Poisson a una tasa de 5 tramas/ms, y otro de tramas de datos con una longitud distribuida uniformemente entre 0 y 1250 bytes según otro proceso de Poisson a una tasa de 10 tramas/ms. Se pide:

1) Sea t el tiempo de transmisión de una trama escogida al azar. Calcule su esperanza ($E[t]$) y su momento de segundo orden ($E[t^2]$).

2) Calcule el retardo medio en cola (W) y retardo total para el tráfico de asentimientos (T_A).

3) Repita el cálculo anterior si se decide dar prioridad al tráfico de asentimientos sobre el de datos.

Calcule los retardos en μs.

Problema 8.8. Sea una red de tres colas en paralelo. Cuando llega una trama, con probabilidad 1/3 va a un sistema M/M/1 con una tasa de servicio de 8 paquetes/s y abandona la red; con probabilidad 1/6 va a un sistema M/M/2 donde cada servidor opera a una tasa 3 paquetes/s y abandona la red; en el resto de casos va a un sistema M/M/1/1 donde el servidor opera a una tasa 24 paquetes/s. En el tercer subsistema, los paquetes que se encuentran el sistema lleno se tiran. Si el proceso de llegadas es de Poisson a tasa 18 paquetes/s, calcule:

Curso 15/16 - mayo
Solución: 0.296 s

1) Proporción de paquetes que van a cada subsistema. Proporción de paquetes rechazados por el sistema M/M/1/1.

2) Número medio de paquetes en la red.

3) Tiempo medio para atravesar cada sistema y la red.

Problema 8.9. Sea la red de colas representada en la figura, donde en cada sistema hay un único recurso, el proceso de llegadas es de Poisson y los tiempos de servicio son exponenciales.

Curso 11/12 - mayo
Solución: 1. 1/4 s, 1 s, 1 s; 2. 5/4 s.

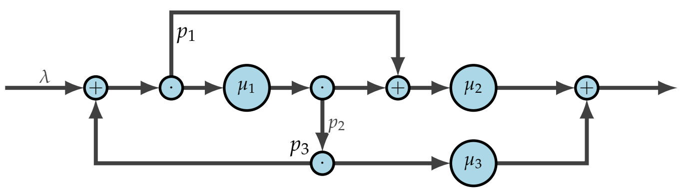


Figura 8.2: Red de colas

Se tiene que:

- $p_1 = 1/5$, $p_2 = 1/2$, $p_3 = 1/2$
- $\lambda = 4$ tramas/s, $\mu_1 = 8$ tramas/s, $\mu_2 = 4$ tramas/s, $\mu_3 = 2$ tramas/s

Se pide:

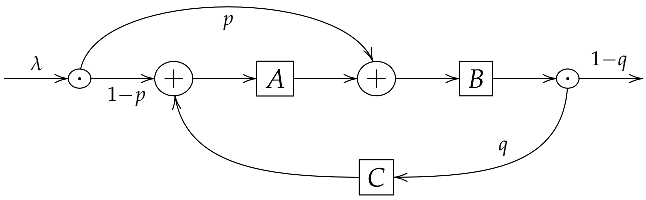
1) Calcule el tiempo medio para atravesar cada sistema.

2) Calcule el tiempo medio total en atravesar la red.

Problema 8.10. Sea la red de colas de la figura, compuesta por tres sistemas (A, B y C) con capacidad infinita para almacenar peticiones, a la que llega un tráfico según un proceso de Poisson a tasa $\lambda = 200$ peticiones/s. En dicha figura, p representa la probabilidad de que una petición que llega "salte" al sistema B, y q representa la probabilidad de que una petición pase por el sistema C tras ser servida en B. El sistema A cuenta con dos servidores para atender peticiones, el sistema B con tres servidores, y el sistema C con un único servidor. El tiempo para atender una petición se puede modelar con una variable aleatoria exponencial de media 4 ms.

Curso 18/19 - mayo

Solución: 1. 200, 250 y 50 pet/s; 2. 4,76 ms, 4,18 ms y 5 ms; 3. 11,24 ms.



Sabiendo que $p = 1/4$ y $q = 1/5$, calcule:

1) Tasa de peticiones que llega a cada sistema A, B y C (**en peticiones/s**).

2) Tiempo medio para atravesar cada sistema (**en ms**).

3) Tiempo medio para atravesar la red (**en ms**).

Índice de problemas de examen